

උසස් පෙළ සංයුක්ත ගණිතය - 1

1. U_1, U_2, \dots, U_n යන ධන නිඛිල සංඛ්‍යා අනුක්‍රමය $U_1 = 1$ හා $n \geq 1$ සඳහා $U_{n+1} = 3U_n + 2$ මගින් අර්ථ දක්වා ඇත. ගණිත අභ්‍යුහනය මගින් $U_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$ වන බව සාධනය කරන්න. $\sum_{r=1}^n U_r$ සොයන්න.
2. $f(x) \equiv x^3 + kx^2 - 2x + 1$ ලෙස ගනිමු. $(x-k)$ යන්නෙන් $f(x)$ බෙදූවිට ලැබෙන ශේෂය k වෙයි. k සඳහා ගත හැකි සියළු අගයන් සොයන්න.
3. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$ බව පෙන්වන්න.
4. $Z = 1+i$ ලෙස ගනිමු. $\frac{a}{b+Z} = -3+i$ ලෙස වන පරිදි a, b සඳහා තාත්වික නියත සොයන්න.
5. $\sin^{-1}(x-y) = \cos^{-1}(2x+y)$ නම් පළමු අවකලන සංගුණකය $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ සොයන්න.
6. $\int \frac{x - \sin x}{1 - \cos x} dx$ සොයන්න.
7. $A(a, b)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි $x+2y-1=0$ රේඛාව තුළින් දර්පන ප්‍රතිබිම්භය වන B හි බාංඩාංක සොයන්න. B හි පථය $x-y=0$ නම්, A හි පථය $7x-y-2=0$ බව පෙන්වන්න.
8. A හා B යනු $x^2 + y^2 - 6x - 9 = 0$ හා $x^2 + y^2 - 4x - 9 = 0$ යන වෘත්ත දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය වේ. A හා B හරහා යන අරය ඒකක 5 වන වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.
9. වෘත්තයක අරය ඒකක තුනකි. එහි කේන්ද්‍රය $x-y+1=0$ මත පිහිටන අතර $(3,7)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි. මෙම අවශ්‍යතා සපුරාලන වෘත්ත දෙකක් පවතින බව පෙන්වා ඒවා සොයන්න. වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්භව ඡේදනය වේද?
10. $\sqrt{3} \sin x - \cos x$ යන්න $R \sin(x - \alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $R(>0)$ හා $\alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ නියත වේ. ඒ නයින්,
 $f(x) = 2(\sqrt{3} \sin x - \cos x + 1)$ නම් සියළු $x \in \mathfrak{R}$ සඳහා $-2 \leq f(x) \leq 6$ බව පෙන්වන්න.

Uva Province Sipsara Udana Student Lanka.com

11. (a) $x^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ තාත්වික මූල α_1, β_1 ද $x^2 + kbx + k^2c = 0$ සමීකරණයේ තාත්වික මූල α_2, β_2 ද වේ. $(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)$ හා $(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)$ මූල වශයෙන් ඇති වර්ගජ සමීකරණය $x^2 - kb^2x + 2k^2c(b^2 - 2c) = 0$ වන බව පෙන්වන්න.

(b) λ හා μ ධන නියත වන අතර $f(x) = \frac{x-\lambda}{x^2-\mu^2}$ ලෙස $f(x)$ ප්‍රකාශනය දී ඇත. $\mu > \lambda$ නම්

තාත්වික x සඳහා $f(x)$ ට ඕනෑම අගයක් ගතහැකි බවද $\lambda > \mu$ නම් එක්තරා ප්‍රාන්තරයක අගයන් හැර අන් සියළු අගයන් $f(x)$ ගන්නා බව ද පෙන්වන්න.

12. (a) $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^{2n+1}$ හි $n \in Z^+$ ද a නියතයක් විට $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^{2n+1}$ හි ප්‍රසාරණය ලියන්න.

$(n+2)$ යනු 3 හි ගුණාකාරයක් නම් එවිට ඉහත ප්‍රසාරණයේ x වලින් ස්වායත්ත පදයක් තිබෙන බව පෙන්වන්න. $n=13$ විට මෙම පදය ${}^{27}C_9(27)^6$ වේ නම් a හි අගය සොයන්න.

$a > 0$ විට මෙම ප්‍රසාරණයේ විශාලතම සංගුණකය සොයන්න.

(b) ගැහැණු 9 කින් හා පිරිමි 8 කින් යුත් කණ්ඩායමකින් අඩු වශයෙන් ගැහැණු 5ක් වත් අඩංගු 12 දෙනෙකුගෙන් යුත් කමිටු කීයක් සෑදිය හැකිද?

(i) මෙම කමිටු වලින් බහුතරය ගැහැණු වන කමිටු කීයක් තිබේ ද?

(ii) ඉහත කමිටු වලින් බහුතරය පිරිමි වන කමිටු කීයක් තිබේ ද?

(c) $y = |x+3| + |x-5|$ හි දළ ප්‍රස්තාර අඳින්න. ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින්

$|x+3| + |x-5| > x+6$ තෘප්ත කරන x හි අගය කුලකය සොයන්න.

$|x+3| + |x-5| = x+6$ විසඳන්න.

13. (a) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු.

$C^3 - C^2 - C = I$ බව පෙන්වන්න. මෙහි I යනු 3 වන ගණයේ ඒකක න්‍යාසය වේ. ඒ නයින් C හි ප්‍රතිලෝමය සොයන්න.

පහත දැක්වෙන සමීකරණය පද්ධතිය න්‍යාස ආකාරයෙන් ලියා දක්වන්න.

$$x - 2y + 2z = 1$$

$$x - y + 2z = 0$$

$$y + z = -2$$

ඒ නයින් සමීකරණ පද්ධතිය විසඳන්න.

- (b) $\operatorname{Re}\left(\frac{z-2i}{z+4}\right)=0$ නම් එවිට z හි පථය, $\sqrt{5}$ අරය සහිත වෘත්තයක් බව සාධනය කරන්න. එහි කේන්ද්‍රය සොයන්න.

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z-2i}{z+4}\right)=0 \quad \text{නම් } |z-1| \text{ හි අඩුතම අගය සොයන්න.}$$

14.(a) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 3\theta + \sin \theta - 2 \sin 2\theta}{\theta \sin^2 \theta} \right]$ අගයන්න.

(b) $y = e^{-x} \cos \sqrt{3x}$ නම්,

(i) $\frac{dy}{dx} = -2e^{-x} \cos\left(\sqrt{3x} - \frac{\pi}{3}\right)$ බවත්,

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} = 4e^{-x} \cos\left(\sqrt{3x} - \frac{2\pi}{3}\right)$ බවත් පෙන්වන්න. $\frac{d^3y}{dx^3} = ky$ වන ලෙස k හි අගය නිර්ණය කරන්න.

- (c) $y = -x^3$ හා $y = \frac{x-1}{2-x}$ හි දළ ප්‍රස්ථාර එකම තලයක අඳින්න. ඒ නයින් $x^4 - 2x^3 - x + 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල ගණන අපෝහනය කරන්න.

15. (a) සුදුසු ආදේශයක් යෙදීමෙන් $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}$ අගය සොයන්න.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x + 2 \sin x}{2 + \cos x} \right) dx \text{ හි අගය අපෝහනය කරන්න.}$$

(b) කොටස් වශයෙන් අනුකූලනය යොදා ගනිමින් $\int x^2 \ln(1+x^2) dx$ සොයන්න.

(c) හින්ත භාග සෙවීමෙන් හෝ අන්ක්‍රමයකින් $\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} dx$ සොයන්න.

Uva Province Sipsara Udara & studentlanka.com

16. (a) $ABCD$ යනු සෘජුකෝණාස්‍රයකි. AB පාදය $y = mx$ රේඛාවට සමාන්තර වේ. A, B හා D ශීර්ෂ පිළිවෙළින් $y = a, x = b$ හා $x = -b$ රේඛා මත පිහිටයි. C ශීර්ෂයේ පථය $(m^2 - 1)x - my + am + (m^2 + 1)b = 0$ සරල රේඛාව බව සාධනය කරන්න.

(b) $P \equiv (-2, 1)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන $S = 0$ වෘත්තයක කේන්ද්‍රය $(-3, -1)$ වේ. $S = 0$ හි සමීකරණය සොයන්න. $S = 0$ වෘත්තයට P ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න. එය මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බව පෙන්වන්න. මූල ලක්ෂ්‍යයේ සිට ඇඳි දෙවන ස්පර්ශකයේ ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය වන Q හි බන්ධාංකය සොයන්න. O මූල ලක්ෂ්‍යය නම් POQ කෝණය කීයද?

17. (a) සියළු $\theta \in \mathbb{R}$ සඳහා

$$\sin^6 \theta + \cos^6 \theta = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\theta \text{ වන බව පෙන්වන්න.}$$

එනමින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් $2(\sin^6 \theta + \cos^6 \theta) = \sin 4\theta$ සමීකරණය විසඳන්න.

(b) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2(x+1)^2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2x+3}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2x+1}\right) = 0$ වන බව පෙන්වන්න.

(c) “සයින” ප්‍රමේය ප්‍රකාශ කරන්න.

ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක වර්ගඵලය $\Delta \equiv \frac{bc}{2} \sin A$ වන බව පෙන්වන්න.

ඒ නමින්, “සයින” ප්‍රමේය අපෝහනය කරන්න. තව දුරටත් $\frac{\Delta}{\tan \frac{A}{2}} + \Delta \tan \frac{A}{2} = bc$ වන බවද පෙන්වන්න.